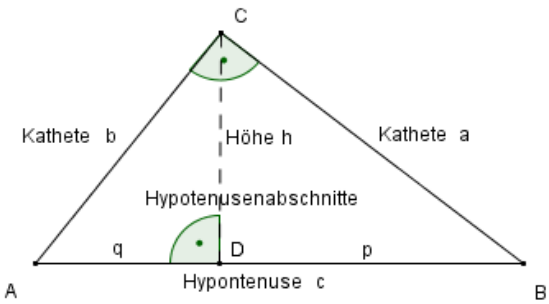
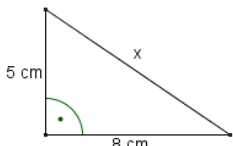


Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 9

| Wissen und Können | | Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen |
|--|---|------------------------------------|
| Zahlenmengen | | |
| $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ natürliche ganze rationale reelle | $-1 \notin \mathbb{N}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ | |
| Wurzeln | | |
| \sqrt{a} (Quadratwurzel) ist diejenige nicht- negative reelle Zahl, deren Quadrat a ergibt. a heißt Radikant der Wurzel, er darf nicht negativ sein! Es gilt: $\sqrt{a^2} = a $ | $\sqrt{25} = 5, \sqrt{0} = 0, \sqrt{(-4)^2} = 4$ $\sqrt{x-2}$ ist nur für $x \geq 2$ definiert $\sqrt{(x-1)^2} = x-1 $ | |
| $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a, b \geq 0)$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$ | $\sqrt{12,5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} = 5$ $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6,25} = 2,5$ | |
| Die n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. | $\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = 0,1$ | |
| Schreibweise: $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ und damit für $a > 0$: $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ | $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3, 9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$ | |
| Binomische Formel | | |
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ | $\left(\frac{1}{4}x - 0,8y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x \cdot 0,8y + (0,8y)^2 = \frac{1}{16}x^2 - 0,4xy + 0,64y^2$ $\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 = \frac{1}{3}(x^2 + 12x + 36) = \frac{1}{3}(x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2) = \frac{1}{3}(x+6)^2$ $\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{7}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{7}b\right) = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - (\sqrt{7}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 - 7b^2$ | |
| Satz des Pythagoras | | |
| Man nennt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse , die beiden anderen Seiten die Katheten . Die Höhe zur Hypotenuse zerlegt diese in zwei Hypotenusenabschnitte.  | a) Berechne bei dem rechtwinkligen Dreiecken die fehlende Seitenlänge  $x^2 = (5\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2$ $x = \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2} = \sqrt{89\text{ cm}^2} \approx 9,43\text{ cm}$ b) Berechne für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, a = 28 cm und c = 53 cm die fehlende Seitenlänge. $a^2 + b^2 = c^2$ $b^2 = c^2 - a^2 = (53\text{ cm})^2 - (28\text{ cm})^2$ $b = \sqrt{2025\text{ cm}^2} = 45\text{ cm}$ | |

Satz des Pythagoras

In jedem **rechtwinkligen** Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.
Es gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Wenn in einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten $x = 12 \text{ cm}$, $y = 5 \text{ cm}$ und $z = 13 \text{ cm}$.

1. Prüfe, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

$$z^2 = (13 \text{ cm})^2 = 169 \text{ cm}^2$$

$$x^2 + y^2 = (12 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2 = 169 \text{ cm}^2$$

Somit hat das Dreieck einen rechten Winkel gegenüber der Seite z.

2. Berechne den Flächeninhalt.

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$$

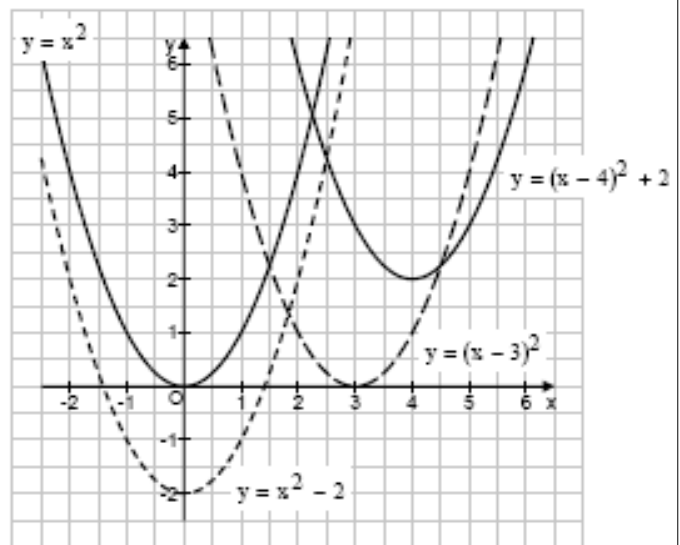
Quadratische Funktionen

Eine Funktion der Form $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt quadratische Funktion. Den zugehörigen Funktionsgraphen nennt man Parabel. Parabeln haben eine Symmetrieachse. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heißt Scheitel. Die Schnittpunkte der Parabeln mit der x - Achse heißen Nullstellen der quadratischen Funktion.

Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2$ heißt Normalparabel.

Verschiebung der Normalparabel

($a = 1$, d.h. $y = x^2 + bx + c$)



1) $y = x^2$ Scheitel: S(0 | 0) Nullstelle: $x = 0$

2) $y = x^2 - 2$ Scheitel: S(0 | -2)
Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

3) $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
Scheitel: S(3 | 0) Nullstelle: $x = 3$

4) $y = (x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18$
Scheitel: S(4 | 2) Keine Nullstellen

Streckung von Normalparabeln

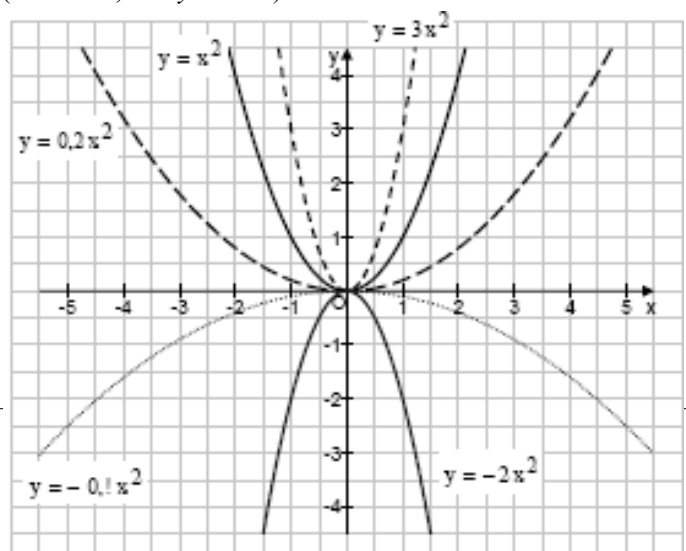
$a > 0$: Die Parabel ist nach oben offen.

$a < 0$: Die Parabel ist nach unten offen.

$|a| > 1$: Die Parabel ist enger als die Normalparabel.

$0 < |a| < 1$: Die Parabel ist weiter als die Normalparabel.

($b = c = 0$, d.h. $y = ax^2$)



Die Gleichung einer quadratischen Funktion kann in der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ oder in der Scheitelform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ (\rightarrow Scheitel: $S(x_s | y_s)$) angegeben werden.

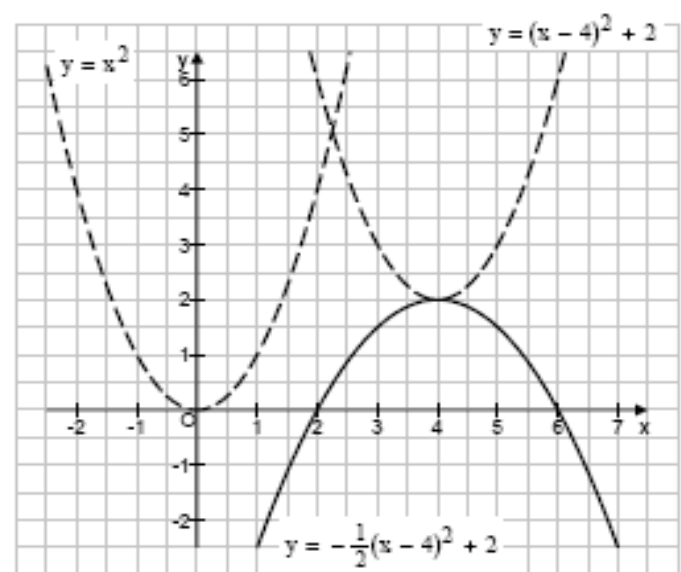
Mittels quadratischer Ergänzung kann die allgemeine Form der Funktionsgleichung in die Scheitelform umgewandelt werden.

Nullstellen

Quadratische Funktionen können keine, eine oder zwei Nullstellen haben:

- **Keine Nullstelle:**
Der Scheitel liegt oberhalb der x – Achse ($y_s > 0$) und die Parabel ist nach oben offen ($a > 0$),
oder
der Scheitel liegt unterhalb der x – Achse ($y_s < 0$) und die Parabel ist nach unten offen ($a < 0$).
- **Eine Nullstelle:**
Der Scheitel liegt auf der x – Achse ($y_s = 0$)
- **Zwei Nullstellen:**
Der Scheitel liegt oberhalb der x – Achse ($y_s > 0$) und die Parabel ist nach unten offen ($a < 0$),
oder
der Scheitel liegt unterhalb der x – Achse ($y_s < 0$) und die Parabel ist nach oben offen ($a > 0$).

Quadratische Funktionen können entweder mit Hilfe der Scheitelform oder, ausgehend von der allgemeinen Form, mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf Nullstellen untersucht werden.



$$y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2$$

Scheitel: $S(4 | 2)$

Wertemenge: $W =]-\infty; 2]$

Nullstellen: $x_1 = 2; x_2 = 6$

Die zugehörige Parabel ist weiter als die Normalparabel,

$$\text{da } |a| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Allgemeine Form der Funktionsgleichung:

$$: y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$$

Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt quadratische Gleichung.

Sonderfälle:

1) Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$
(Reinquadratische Gleichung)

2) Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx = 0$

$$\begin{aligned} 1.1) \quad & 4x^2 - 20 = 0; \\ & x^2 = 5; \\ & |x| = \sqrt{5}; \\ & x_1 = -\sqrt{5}; x_2 = \sqrt{5} \\ 1.2) \quad & \frac{1}{3}x^2 + 3 = 0; \\ & x^2 = -9 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat in \mathbb{R} keine Lösung, da Quadrate reeller Zahlen nie negativ sind.

2) $4x^2 - 20x = 0$; (Faktorisieren, d.h. x ausklammern)

$4x(x - 5) = 0$; (Ein Produkt nimmt genau dann den Wert Null an, wenn einer der Faktoren Null ist.)

$$x_1 = 0; x_2 = 5$$

Lösungsformel: Um eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ auf Lösungen zu untersuchen, bestimmt man zunächst die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$.

- Falls $D < 0$, so hat die Gleichung keine Lösung.
- Falls $D = 0$, so hat die Gleichung genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{b}{2a}$
- Falls $D > 0$, so hat die Gleichung die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1) $7x^2 - 6x + 2 = 0$; $a = 7$, $b = -6$, $c = 2$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = -20 < 0$$

\Rightarrow Keine Lösung!

2) $-2x^2 + 12x - 18 = 0$; $a = -2$, $b = 12$, $c = -18$

$$D = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Genau eine Lösung: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$$

3) $6x^2 - 7x - 3 = 0$; $a = 6$, $b = -7$, $c = -3$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121 > 0$$

\Rightarrow Zwei Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 11}{12}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3}$$

Ergänzung: Die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = 6x^2 - 7x - 3$ hat die Nullstellen 1,5 und $-1/3$.

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment heißt mehrstufig, wenn es aus mehreren Zufallsexperimenten zusammengesetzt ist. Zur Veranschaulichung dienen Baumdiagramme. Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen bzw. Ereignissen können mit Hilfe von Pfadregeln bestimmt werden.

1. Pfadregel:

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

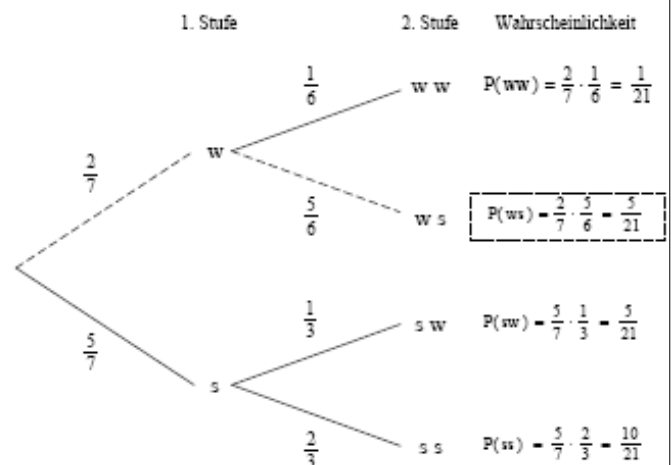
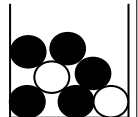
2. Pfadregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

In einer Urne befinden sich zwei weiße und fünf schwarze Kugeln. Aus dieser Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Ergebnisraum: $\Omega = \{ww, ws, sw, ss\}$

Baumdiagramm:



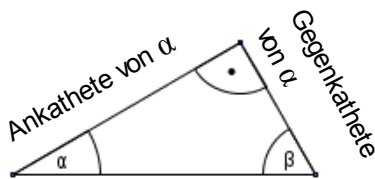
Ereignis E „Kugeln haben die gleiche Farbe“

$E = \{ww, ss\}$ als Teilmenge des Ergebnisraumes Ω

$$P(E) = P(\{ww, ss\}) = P(ww) + P(ss) = \frac{1}{21} + \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$

Trigonometrie (Sinus, Cosinus, Tangens)

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete seine **Gegenkathete**, die andere seine **Ankathete**.

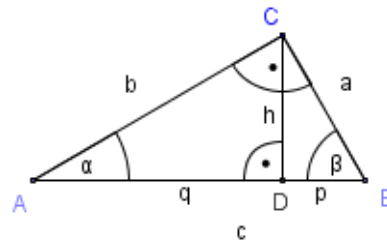


$$\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \sin \alpha$$

$$\frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \cos \alpha$$

$$\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \tan \alpha$$

Gegeben sind $b = 4,5 \text{ cm}$ und $\alpha = 43,5^\circ$. Gesucht sind q und h .



$$\sin 43,5^\circ = \frac{h}{b}$$

$$h = 4,5 \text{ cm} \cdot \sin 43,5^\circ \approx 3,10 \text{ cm}$$

$$\cos 43,5^\circ = \frac{q}{b}$$

$$q = \cos 43,5^\circ \cdot 4,5 \text{ cm} \approx 2,94 \text{ cm}$$

Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens
Für alle Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ gilt:

$$(1) \quad \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$(2) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(3) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

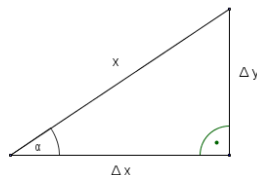
Gegeben ist $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Berechne genaue Werte für
a) $\cos \alpha$, b) $\tan \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \quad \text{Also:} \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \text{da } \cos \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Steigung

Eine Gerade steigt auf der waagerechten Länge Δx um die Höhe Δy , der Steigungswinkel α ist der Winkel gegenüber der Höhe. Die Steigung ist dann



$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = p\%$$

Der Zirler Berg hat die Steigung 16 %.
a) Wie groß ist der Steigungswinkel α ?

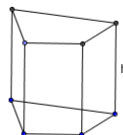
$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 16\% = 0,16 \\ \alpha &= 9,09^\circ \end{aligned}$$

b) Um wie viel Meter steigt der Berg, bei einer horizontalen Länge von 1 km?

$$\Delta y = \Delta x \cdot \tan \alpha = 1000 \text{ m} \cdot 0,16 = 160 \text{ m}$$

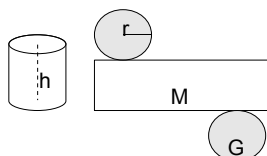
Raumgeometrie

Für ein **Prisma** und einen **Zylinder** mit der Grundfläche G , der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:



$$\begin{aligned} \text{Volumen:} \quad & V = G \cdot h \\ \text{Oberflächeninhalt:} \quad & O = 2G + M \end{aligned}$$

Speziell für einen **Zylinder** mit dem Grundkreisradius r und Höhe h gilt:



$$\begin{aligned} \text{Volumen:} \quad & V = \pi r^2 \cdot h \\ \text{Inhalt der Mantelfläche:} \quad & M = 2\pi r \cdot h \\ \text{Oberflächeninhalt:} \quad & O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \end{aligned}$$

Ein gerades Prisma, deren Grundfläche ein achsensymmetrisches Trapez ist, hat die Maße $a = 8,4 \text{ cm}$, $b = 6,2 \text{ cm}$, $h_{\text{Trapez}} = 5,8 \text{ cm}$, $c = 4,2 \text{ cm}$ und $h = 12,1 \text{ cm}$.

Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt.

Grundfläche:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} (8,4 \text{ cm} + 4,2 \text{ cm}) \cdot 5,8 \text{ cm} \\ G &= 36,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Volumen: } V = G \cdot h = 36,5 \text{ cm}^2 \cdot 12,1 \text{ cm} = 442 \text{ cm}^3$$

Oberflächeninhalt:

$$\begin{aligned} M &= (2 \cdot 6,2 \text{ cm} + 4,2 \text{ cm} + 8,4 \text{ cm}) \cdot 12,1 \text{ cm} = 302,5 \text{ cm}^2 \\ O &= 2G + M = 73 \text{ cm}^2 + 302,5 \text{ cm}^2 = 375,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Für eine **Pyramide** und einen **Kegel** mit der Grundfläche G , der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:

Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $O = G + M$

Speziell für einen **Kegel** mit dem Grundkreisradius r und Höhe h gilt:

Volumen:

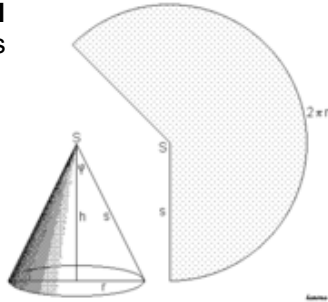
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Inhalt der Mantelfläche:

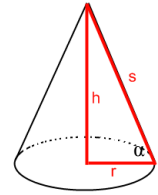
$$M = 2 \pi r \cdot s$$

Oberflächeninhalt:

$$O = \pi r^2 + \pi r \cdot s$$



Berechne das Volumen, den Oberflächeninhalt und den Neigungswinkel einer Mantellinie eines Kegels mit dem Radius $r = 8 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 6 \text{ cm}$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi (8 \text{ cm})^2 \cdot 6 \text{ cm} = 402 \text{ cm}^2$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(8 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = 10 \text{ cm}$$

$$O = \pi \cdot (8 \text{ cm})^2 + \pi \cdot 8 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 144 \pi \text{ cm}^2 \approx 452 \text{ cm}^2$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{r} = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0,75$$

Neigungswinkel: $\alpha \approx 37^\circ$